

Proposition (Formule de Burnside)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X et $|G^X|$ le nombre d'orbites.
Alors $|G^X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$

$$\text{On a } \{(g, x) \in G \times X ; g \cdot x = x\} = \bigsqcup_{x \in X} \text{Stab}(x) \times \{x\} = \bigsqcup_{g \in G} \{g\} \times \text{Fix}(g).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| &= \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| = \sum_{x \in G^X} \sum_{g \in \text{Stab}(x)} |\text{Stab}(g)| \\ &= \sum_{x \in G^X} \underbrace{|\text{Orb}(x)| \times |\text{Stab}(x)|}_{= |G|} \\ &= |G| \times |G^X| \end{aligned}$$

$|\text{Stab}(g)| = |\text{Stab}(g \cdot x)|$ où $y = g \cdot x$
 $= |g \text{Stab}(x) g^{-1}|$
 $= |\text{Stab}(x)|$

Proposition: Soit G un groupe fini, p la probabilité que 2 éléments choisis uniformément
commutent et k le nombre de classes de conjugaison dans G .
Alors $p = \frac{k}{|G|}$.

$$G \text{ sur } G \text{ par conjugaison et } \forall g \in G, \text{Fix}(g) = \{x \in G ; xgx^{-1} = g\} = \{x \in G ; xg = gx\}$$

$$\text{Donc } p = \frac{1}{|G|^2} |\{(g, x) \in G^2 ; xg = gx\}| = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{1}{|G|} \times k \text{ par Burnside.}$$

Lemme: Si $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien.

Soit $x \in G$ tel que $G/Z(G) = \langle xZ(G) \rangle$. Soit $g, h \in G$. Alors $\exists m, n \in \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} gZ(G) = x^m Z(G) \\ hZ(G) = x^n Z(G) \end{cases}$

Donc $\exists z_1, z_2 \in Z(G)$ tels que $\begin{cases} g = x^m z_1 \\ h = x^n z_2 \end{cases}$.

Ainsi, $gh = x^m z_1 x^n z_2 = x^n x^m z_2 z_1 = x^n z_2 x^m z_1 = hg$. Donc G est abélien.

Proposition: Soit G un groupe non abélien fini.

Alors $p \leq 5/8$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } m &= |\{(g, x) \in G^2 ; xg = gx\}| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{g \in Z(G)} |\text{Fix}(g)| + \sum_{g \notin Z(G)} |\text{Fix}(g)| \\ &\leq |G| |Z(G)| + \frac{|G|}{2} (|G| - |Z(G)|) \end{aligned}$$

ss-groupe strict de G donc de cardinal $\leq \frac{|G|}{2}$ par Lagrange

$$\text{D'où } p = \frac{m}{|G|^2} \leq \frac{|G| |Z(G)|}{|G|^2} + \frac{|G|}{2|G|^2} (|G| - |Z(G)|) = \frac{|Z(G)|}{2|G|} + \frac{1}{2}$$

Par le lemme, $G/Z(G)$ n'est pas cyclique donc $|G/Z(G)| \geq 4$ d'où $\frac{|Z(G)|}{|G|} \leq \frac{1}{4}$.

$$\text{Ainsi, } p \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

si $|G/Z(G)| = 7$, $G = Z(G)$ est abélien

si $|G/Z(G)| = 2$ ou 3 ,

$G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ donc cyclique